1.7 Zagadnienia szczegółowe związane z równaniem ruchu

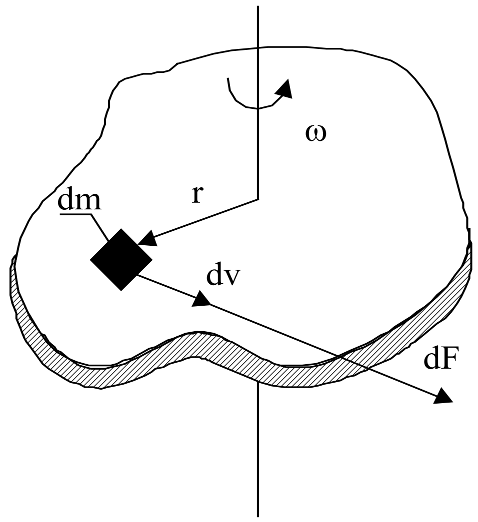
1.7.1 Moment bezwładności i moment zamachowy

Równanie równowagi sił działających na element masy ***dm*** pokazany na rys.1.18 będzie miało postać:

$$dF = dm\frac{d\vartheta}{dt},$$

a stąd elementarny moment dynamiczny:

$$dM_d = r * dm\frac{d\vartheta}{dt} = r^2 * dm\frac{d\omega}{dt}.$$



Rys.1.18 Ilustracja pojęcia momentu bezwładności:
dm- masa elementarna, *dF*- elementarna siła przyspieszająca masę *dm*

Sumując elementarne momenty dla całej masy **m**. rozpatrywanej bryły, otrzymuje się:

$$M_d = \frac{d\omega}{dt}\int_0^m r^2 dm = J\frac{d\omega}{dt},$$

skąd wynika, że moment bezwładności ***J*** opisany jest wzorem:

$$J = \int_0^m r^2 dm. \tag{1.27}$$

Wyznaczenie momentu bezwładności jest szczególnie proste dla regularnych brył geometrycznych. Na przykład, dla wydrążonego cylindra (o promieniu wewnętrznym $\mathbf{r_1}$ i zewnętrznym $\mathbf{r_2}$) o masie właściwej γ [kg/m^3] będzie:

$$dm = \gamma \cdot dv = (\gamma \cdot 2\pi \cdot r \cdot l)dr\ ,$$

stąd

$$J = \int_{r_1}^{r_2} r^2 (\gamma \cdot 2\pi \cdot r \cdot l)dr = \frac{\gamma}{2} l\pi \left(r_2^4 - r_1^4\right),$$

a po wstawieniu $m = \gamma\, l\, \pi\, (r_2^2 - r_1^2)$, otrzymuje się:

$$J = \frac{m}{2}\left(r_2^2 + r_1^2\right) \text{ [kg m}^2\text{].}$$

Dla bardziej złożonych brył moment bezwładności oblicza się dla ich składników prostych, sumując je bezpośrednio.

Jeśli przyjąć, że ciało o masie zredukowanej $\mathbf{m_b}$ wiruje względem osi przechodzącej przez punkt ciężkości, to moment bezwładności jest równy iloczynowi masy ciała i kwadratu zastępczego promienia bezwładności masy $\mathbf{r_b}$ [kg m^2 lub Nm s^2]:

$$J = m_b \cdot r_b^2\ .$$

W katalogach jest podawana niekiedy wartość tzw. momentu zamachowego:

$$GD^2 = g\, m\, \left(2r_b\right)^2 = 4Jg\ ,$$

gdzie: g - przyspieszenie ziemskie [m/s^2].

Tak więc:

$$J = \frac{GD^2}{4g}\ , \qquad (1.28a)$$

przy czym GD^2 jest wyrażone w [Nm^2].

Jeśli GD^2 jest wyrażone w [kG m^2], to przelicznik będzie wynosił:

$$J = \frac{GD^2}{4}\ , \qquad (1.28b)$$

Jeśli prędkość jest wyrażona w obrotach na minutę, to moment dynamiczny wyznacza się z zależności:

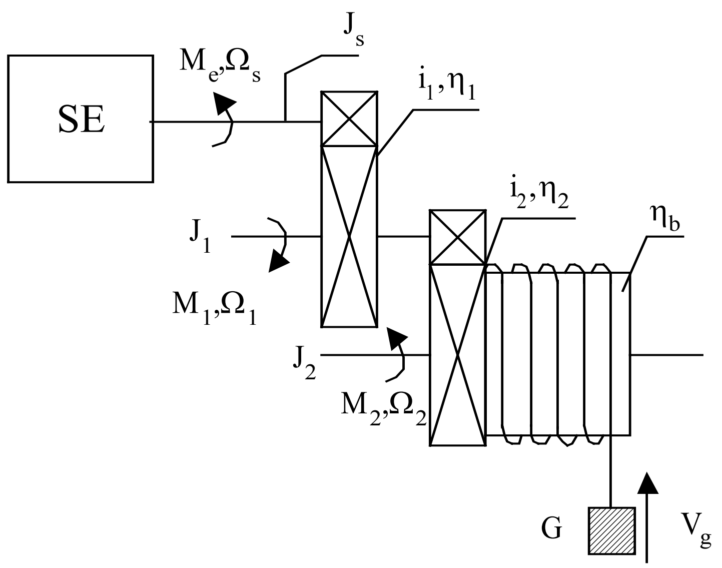
$$M_d = J\frac{d\omega}{dt} = \frac{GD^2}{4g}\frac{\pi}{30}\frac{dn}{dt} = \frac{GD^2}{375}\frac{dn}{dt}\ , \qquad (1.29)$$

przy czym: M_d [Nm], GD^2 [Nm^2], n [1/min].

1.7.2 Zastępczy moment bezwładności

Technicznie rozwiązania układów napędowych zawierają zwykle *przekładnie mechaniczne zmieniające prędkość obrotową i zmieniające ruch obrotowy na postępowy* (rys.1.19).

Elementy maszyny roboczej, połączone z silnikiem napędowym oraz między sobą za pomocą przekładni mechanicznych mają różne prędkości kątowe lub liniowe, różne momenty oporowe. Dlatego zarówno do obliczeń statycznych (np. wyznaczenie mocy znamionowej silnika) jak i dynamicznych (rozwiązywanie równania ruchu), należy *sprowadzić momenty oporowe i momenty bezwładności poszczególnych elementów układu na wał silnika.*



Rys.1.19 Mechanizm z przekładnią i zmianą ruchu obrotowego na postępowy

Przy wyznaczeniu zastępczego momentu bezwładności korzysta się z zasady zachowania energii, czyli, że całkowita energia kinetyczna układu zastępczego musi być równa sumie energii kinetycznych poszczególnych elementów układu rzeczywistego.

Dla układu zawierającego elementy o ruchu obrotowym i postępowym (przy oznaczeniach jak na rys.1.19) będzie:

$$E_k = J_z \frac{\omega_s^2}{2} = J_s \frac{\omega_s^2}{2} + J_1 \frac{\omega_1^2}{2} + J_2 \frac{\omega_2^2}{2} + m_G \frac{\vartheta_g^2}{2}$$

a po przekształceniu:

$$J_z = J_s + J_1 \frac{1}{i_1^2} + J_2 \frac{1}{(i_1 i_2)^2} + m_G \left(\frac{\vartheta_g}{\omega_s} \right)^2$$

gdzie: $i_1 = \frac{\omega_s}{\omega_1}$, $i_2 = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ - przełożenia poszczególnych przekładni.

Czyli ogólna zależność będzie miała postać:

gdzie:

$$\boxed{J_z = \sum_{j=1}^{n} J_j \left(\frac{\omega_j}{\omega_s} \right)^2 + \sum_{k=1}^{m} m_k \left(\frac{\vartheta_k}{\omega_s} \right)^2 \quad , \qquad (1.30)}$$

J_j - momenty bezwładności elementów wirujących z prędkością kątową ω_j (indeks j=1 dotyczy silnika napędowego),

m_k - masy elementów poruszających się ruchem postępowym z prędkością liniową ϑ_k .

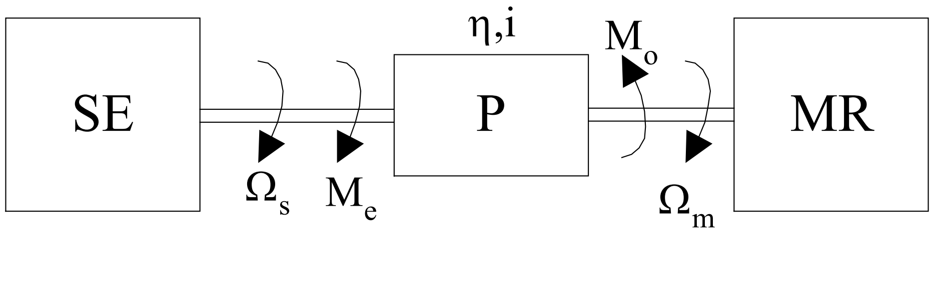
Uwzględniając zależność (1.28a), zastępczy moment zamachowy układu można wyrazić wzorem:

$$\boxed{GD_z^2 = \sum_{j=1}^{n} GD_j^2 \left(\frac{\omega_j}{\omega_s} \right)^2 + 4 \sum_{k=1}^{m} G_k \left(\frac{\vartheta_k}{\omega_s} \right)^2 \quad , \qquad (1.31)}$$

gdzie: $G_k = m_k \cdot g$.

1.7.3 Zastępczy moment oporowy

Zastępczy (zredukowany) moment oporowy na wale silnika elektrycznego wyznacza się na podstawie zasady zachowania energii w stanie ustalonym, tzn.: *przyjmuje się, że* ***moc wydawana przez silnik napędowy równa jest sumie mocy pobieranych przez poszczególne elementy maszyny roboczej, powiększonej o straty w przekładniach.***



Rys.1.20 Schemat układu napędowego z przekładnią jednostopniową

Rozpatrując to zagadnienie dla prostego układu napędowego, w którym maszyna robocza wirująca z prędkością ω_m jest połączona z silnikiem wirującym z prędkością ω_e, za pośrednictwem jednostopniowej przekładni mechanicznej (rys.1.20), otrzymujemy zależność na moment oporowy zastępczy w dwóch przypadkach:

1 - ***dla przypadku pracy silnikowej*** - przepływ energii od silnika do maszyny roboczej:

$$P_e = M_e \Omega_s \eta = M_o \Omega_m$$

skąd zastępczy moment oporowy sprowadzony do wału silnika będzie wynosił:

$$M_{oz} = M_e = \frac{M_o}{\eta \cdot i}, \qquad (1.32)$$

gdzie przełożenie przekładni - $i = \frac{\Omega_s}{\Omega_m}$;

2 - ***dla przypadku pracy hamulcowej*** - przepływ energii od maszyny roboczej do silnika:

$$P_e = M_e \Omega_s = M_o \Omega_m \eta,$$

stąd:

$$M_{oz} = M_e = \frac{M_o}{i}\eta. \qquad (1.33)$$

Jeżeli w układzie zastosowana jest przekładnia k-stopniowa, to wypadkowa sprawność i wypadkowe przełożenie przekładni są równe odpowiednio:

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \cdots \cdot \eta_k$$

$$i = i_1 \cdot i_2 \cdot \cdots \cdot i_k \qquad (1.34)$$

W przypadku złożonego układu napędowego, w którym moc silnika jest doprowadzona za pośrednictwem przekładni do kilku elementów maszyny roboczej oraz dodatkowo ruch obrotowy silnika jest przekształcony w ruch postępowy elementu roboczego o prędkości liniowej v, jak to ma miejsce w urządzeniach transportowych (klatka wyciągu pionowego, most i wózek suwnicy - rys.1.19),

to ***przy podnoszeniu*** (praca silnikowa) moc silnika będzie równa:

$$P_s = M_e \Omega_s = M_1 \frac{\Omega_1}{\eta_1} + M_2 \frac{\Omega_2}{\eta_1 \eta_2} + m_G \frac{\vartheta_g}{\eta_1 \eta_2 \eta_b},$$

czyli:

$$\boxed{M_{oz} = M_e = M_1 \frac{1}{\eta_1 i_1} + M_2 \frac{1}{\eta_1 \eta_2 i_1 i_2} + m_G \frac{\vartheta_g}{\Omega_b} \frac{1}{\eta_1 \eta_2 \eta_b i_1 i_2}, \quad (1.35)}$$

gdzie $\Omega_b = \Omega_2$ - prędkość kątowa bębna na rys.1.19.

Podobnie ***przy opuszczaniu*** (praca hamulcowa silnika) będzie:

$$\boxed{M_{oz} = M_1 \frac{\eta_1}{i_1} + M_2 \frac{\eta_1 \eta_2}{i_1 i_2} + m_G \frac{\vartheta_g}{\Omega_b} \frac{\eta_1 \eta_2 \eta_b}{i_1 i_2}. \quad (1.36)}$$