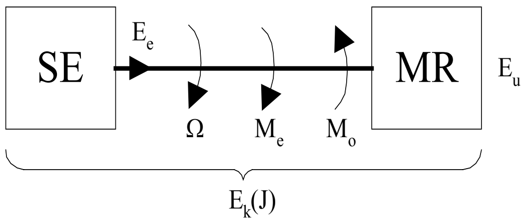
1.5 Równanie ruchu układu napędowego

Równanie ruchu można sformułować na podstawie zasady najmniejszego działania Hamiltona, lub zasady zachowania energii, która ma prostą interpretację fizyczną.

Całkowita energia E_e dostarczona przez silnik SE do maszyny roboczej MR (rys.1.14) składa się z energii użytecznej E_u oraz energii kinetycznej zmagazynowanej w układzie napędowym E_k (w masach wirujących):



Rys.1.14 Przepływ energii w układzie napędowym w stanie dynamicznym

$$E_e = E_u + E_k\,; \tag{1.10}$$

czyli:

$$\int_0^t P_e dt = \int_0^t P_u dt + J\frac{\Omega^2}{2}\,. \tag{1.11}$$

Przyjmując że dostarczona przez silnik moc wynosi:

$$P_e = M_e \cdot \Omega\,, \tag{1.12}$$

a moc mechaniczna użyteczna:

$$P_u = M_o \cdot \Omega\,. \tag{1.13}$$

oraz różniczkując względem czasu wyrażenie (1.11) i dzieląc je następnie przez Ω otrzymuje się:

$$M_e - M_o = J\frac{d\Omega}{dt} + \frac{\Omega}{2}\frac{dJ}{dt}\,. \tag{1.14}$$

Uwzględniając, że $\Omega = \frac{d\alpha}{dt}$, (gdzie a - kąt obrotu wału), mamy:

$$M_e - M_o = J\frac{d\Omega}{dt} + \frac{\Omega}{2}\frac{d\alpha}{d\alpha}\frac{dJ}{dt} = J\frac{d\Omega}{dt} + \frac{\Omega^2}{2}\frac{dJ}{d\alpha} = M_d\,, \tag{1.15}$$

gdzie M_d jest nazywany *momentem dynamicznym napędu*.

W równaniu (1.15) moment dynamiczny zawiera dwie składowe zmiennej energii kinetycznej:
- pierwsza - wynikająca ze zmiany prędkości
  przy stałym momencie bezwładności --- $J\frac{d\Omega}{dt}$
- druga - uwzględniająca zmienność momentu bezwładności --- $\frac{\Omega^2}{2}\frac{dJ}{d\alpha}$

W równaniu (1.15) nie występują w sposób jasny straty (tarcie, luzy) towarzyszące przenoszeniu energii od silnika do mechanizmu. W pierwszym przybliżeniu można przyjąć, że są one uwzględnione w wartościach $\mathbf{M_o}$ lub $\mathbf{M_e}$, jako ich dodatkowe składniki, np.:

$$M_o = M_o(\Omega, \varphi, x, t) + M_t, \tag{1.16}$$

gdzie $\mathbf{M_t}$ wyrażone jest wzorem (1.8).

Większość układów napędowych ma stały, niezależny od czasu ani od położenia, moment bezwładności. Dla takich napędów równanie ruchu przyjmuje postać:

$$M_e - M_o = J\frac{d\Omega}{dt} = M_d. \tag{1.17}$$

1.6 Stany pracy układu napędowego

Z punktu widzenia zmiany prędkości kątowej rozróżnia się dwa stany pracy:
- *stan ustalony*, w którym prędkość Ω = const (lub ϑ_p=const), czyli:

$$\frac{d\Omega}{dt} = 0 \qquad \text{lub} \qquad \frac{\vartheta_p}{dt} = 0, \tag{1.18}$$

- *stan nieustalony* (przejściowy, dynamiczny), w którym prędkość $\Omega \neq$ const (lub $\vartheta_p \neq$ const), czyli:

$$\frac{d\Omega}{dt} \neq 0 \qquad \text{lub} \qquad \frac{\vartheta_p}{dt} \neq 0. \tag{1.19}$$

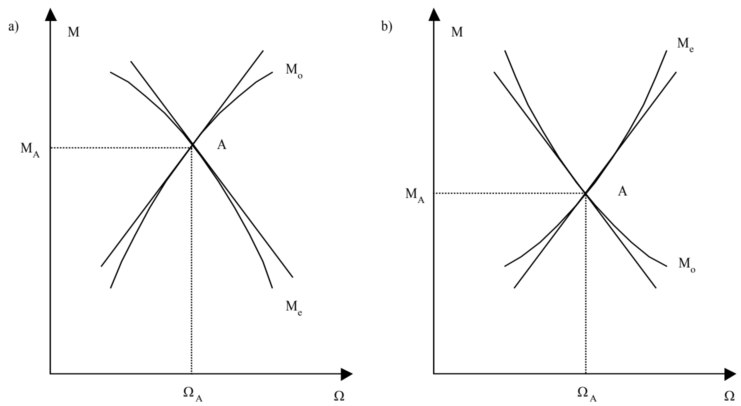
1.6.1 Stan ustalony - równowaga statyczna

Stan ustalony, zwany również *stanem równowagi statycznej napędu* występuje wówczas, gdy, zgodnie z (1.18), moment dynamiczny M_d=0,

czyli moment obciążenia jest równoważony przez moment silnika.

Stan ten jest charakteryzowany na wykresie Ω-M charakterystyk mechanicznych silnika i maszyny roboczej, *punktem przecięcia A charakterystyki $\Omega=f(M_e)$ i $\Omega=f(M_o)$.*

Punkt A jest *stabilnym punktem równowagi*,
czyli *układ napędowy* w stanie ustalonym *jest stabilny* (stateczny) wówczas,
gdy zakłócenie stanu równowagi wywołuje powstanie momentu
dążącego do sprowadzenia układu ponownie
do położenia równowagi w punkcie A (rys.1.15a).
Jeżeli to nie nastąpi, to *układ jest niestabilny* (niestateczny - 1.15b).



Rys.1.15 Ilustracje stabilności statycznej układu napędowego:
a - układ stabilny, b - układ niestabilny.

Przy założeniu małych, dostatecznie wolno przebiegających, odchyleń od punktu pracy ustalonej, równania rzeczywistych charakterystyk silnika i maszyny roboczej można zastąpić równaniami stycznych, poprowadzonych przez punkt A odpowiadający stanowi równowagi (rys.1.15), czyli:

$$\Delta M_e = a\Delta\Omega \text{ , oraz } \Delta M_o = b\Delta\Omega, \tag{1.20}$$

gdzie:

$$a = \left(\frac{dM_e}{d\Omega}\right)\Bigg|_{\Omega=\Omega_A} ; \quad b = \left(\frac{dM_o}{d\Omega}\right)\Bigg|_{\Omega=\Omega_A} . \tag{1.21}$$

Równanie ruchu (w przypadku J= const), napisane dla przyrostów momentów i prędkości, przyjmuje postać:

$$a\Delta\Omega - b\Delta\Omega = J\frac{d\Delta\Omega}{dt},$$

czyli po przekształceniu:

$$\frac{d\Delta\Omega}{dt} - \frac{a-b}{J}\Delta\Omega = 0 . \tag{1.22}$$

Rozwiązanie równania różniczkowego (1.23) wyznacza przebieg prędkości kątowej przy małym zaburzeniu w punkcie pracy A:

$$\Delta\Omega = Ce^{\frac{a-b}{J}t}. \tag{1.23}$$

Rozważany <u>punkt pracy A będzie stateczny</u> tylko wówczas, gdy odchyłka prędkości będzie dążyła do zera:

$$\lim_{t\to\infty} \Delta\Omega = 0. \tag{1.24}$$

Warunek (1.24) zostanie spełniony, jeśli wykładnik potęgi w równaniu (1.23) będzie ujemny, czyli przy uwzględnieniu że J>0, gdy będzie spełniony warunek:

$$a - b < 0 \qquad \text{lub} \qquad a < b.$$

Wartości ***a*** i ***b*** określają nachylenia funkcji w punkcie przecięcia charakterystyk mechanicznych.

A więc punkt pracy A będzie stateczny, jeśli będzie spełniony

warunek stabilności statycznej układu napędowego:

$$\left.\left(\frac{dM_e}{d\Omega}\right)\right|_{\Omega=\Omega_A} < \left.\left(\frac{dM_o}{d\Omega}\right)\right|_{\Omega=\Omega_A}. \tag{1.25}$$

Z zależności (1.25) wynika, że:

przy pracy statecznej napędu - ze wzrostem prędkości kątowej moment oporowy <u>***M*** $_o$ *powinien rosnąć szybciej*</u> niż moment obrotowy **M** $_e$ silnika napędowego.

Wówczas, przy wzroście prędkości, $M_o>M_e$ i następuje hamowanie, natomiast przy jej zmniejszaniu się, $M_o<M_e$ i mamy przyspieszenie napędu .

W obydwu przypadkach układ napędowy wraca do *poprzedniego punktu pracy*.

Analogicznie, na podstawie analizy równania (1.23) można również podać warunek niestabilności statycznej układu napędowego, a mianowicie:

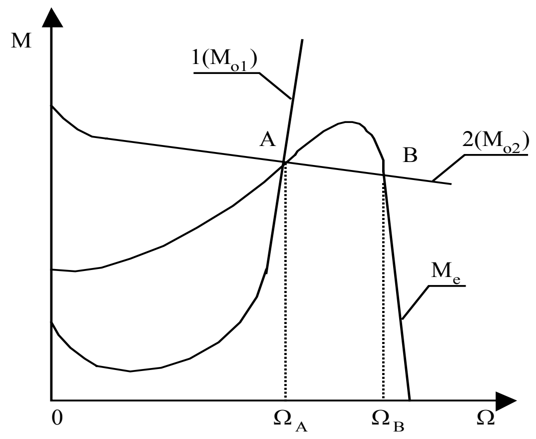
$$\left.\left(\frac{dM_e}{d\Omega}\right)\right|_{\Omega=\Omega_A} \geq \left.\left(\frac{dM_o}{d\Omega}\right)\right|_{\Omega=\Omega_A}. \tag{1.26}$$

W tym przypadku działanie zakłócenia powoduje zawsze oddalanie się punktu pracy układu od poprzedniego punktu A.

Z przedstawionej analizy wynika, że o równowadze statycznej układu napędowego decyduje charakter przebiegów statycznych charakterystyk mechanicznych silnika i maszyny roboczej.

Na rys.1.16 przedstawiono przykład, z którego wynika, że ten sam punkt A pracy ustalonej może być jednocześnie, w zależności od przebiegu charakterystyki maszyny roboczej:

- ***stabilnym*** (dla krzywej 1),
- ***niestabilnym*** (dla krzywej 2) punktem pracy.



Rys.1.16 Ilustracja stabilności statycznej układu napędowego:
A- punkt pracy stabilnej dla krzywej 1 (M_{o1}=C ω^2) i niestabilnej dla krzywej 2 (M_{o2}=const),
B- punkt pracy stabilnej dla krzywej 2.

Przy szybkich zmianach momentu i prędkości kątowej układu napędowego, mechaniczne charakterystyki statyczne nie mają charakteru decydującego, należy więc badać zachowanie się układu w stanach dynamicznych (nieustalonych) i analizować je między innymi z punktu widzenia stabilności dynamicznej (kryterium Hurwitza, Nyqista, D-rozbicia płaszczyzny i inne).

1.6.1 Stany nieustalone

Stan nieustalony (przejściowy, dynamiczny) wiąże się ze zmianą punktu pracy napędu w skutek działania trzech rodzajów zaburzeń:

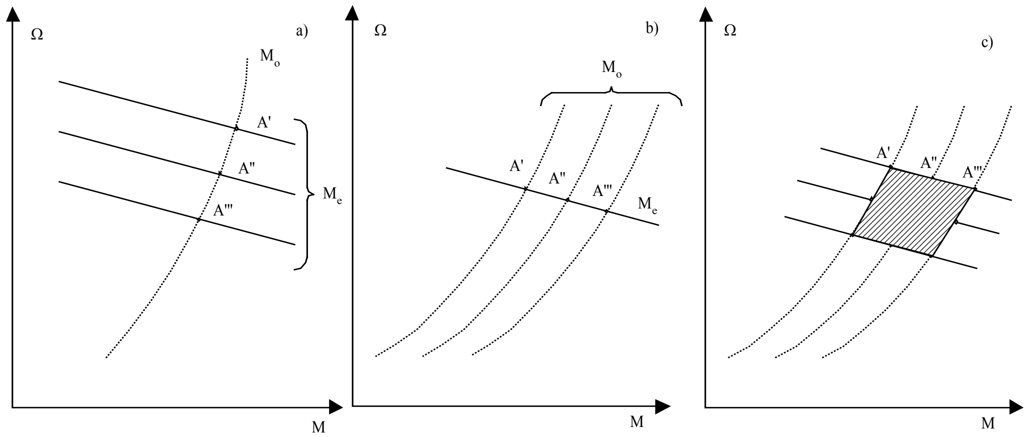
- zakłóceń (np. wahania napięcia lub częstotliwości w sieci zasilającej),
- awarii (np. zwarcie w układzie zasilania, chwilowy zanik napięcia sieci, zablokowanie wirnika)
- celowych działań układu sterującego (lub człowieka) wymuszonych przez specyfikę procesu technologicznego.

Wśród tych ostatnich można wyróżnić następujące stany dynamiczne:

- ***rozruch*** - przejście ze stanu spoczynkowego do określonego stanu pracy ustalonej (np. praca przy obciążeniu i prędkości znamionowej, praca na biegu jałowym, praca przy obniżonej prędkości kątowej itp.),
- ***zatrzymanie*** (wybieg) - proces odwrotny do powyższego, przy czym zmniejszanie prędkości do zera następuje w sposób naturalny, tj. w wyniku sił tarcia w układzie,
- ***hamowanie*** - proces, podczas którego układ napędowy jest zatrzymywany przez dostarczenie dodatkowego momentu większego niż moment tarcia; przy czym

moment hamujący (spowalniający) może być uzyskiwany na wiele sposobów (mechaniczny, hydrauliczny lub elektromechaniczny),

- ***nawrót*** (rewers - czyli zmiana kierunku obrotów) - proces w którym następuje przejście ze stanu pracy ustalonej przy jednym kierunku wirowania do pracy ustalonej w przeciwnym kierunku wirowania.
  Rewers prędkości związany jest z zatrzymaniem lub hamowaniem silnika i następnie z natychmiastowym rozruchem w przeciwnym kierunku wirowania,
- ***regulacja prędkości kątowej*** - polega na zmianie charakterystyk Ω=f(M_e) silnika przy utrzymywaniu niezmienionej charakterystyki maszyny roboczej. Następuje wówczas przejście od jednej prędkości ustalonej (w punkcie pracy A')do innej (punkt A'') przy stałej charakterystyce M_o (rys.1,17a), kolejne punkty pracy leżą na charakterystyce maszyny roboczej,
- ***regulacja momentu obciążenia*** - polega na zmianie charakterystyk Ω=f(M_o) maszyny roboczej przy niezmienionej charakterystyce silnika. Powoduje to przejście do innego punktu pracy na charakterystyce silnika (rys,1.17b); kolejne punkty pracy leżą na charakterystyce mechanicznej silnika.
  W szczególnych przypadkach regulacja może wymagać zmian obu charakterystyk mechanicznych: silnika i maszyny roboczej (np. w układach napędowych lokomotyw elektrycznych). W takim przypadku kolejne punkty pracy pokrywają cały obszar wyznaczony granicznymi charakterystykami uzyskanymi w procesie regulacji (rys.1.17c).



Rys.1.17

Ilustracje regulacji prędkości i momentu obciążenia